

# Outils algébriques pour la théorie de Dwork

A. DABBABI

UNIVERSITÉ DE MONASTIR  
FACULTÉ DES SCIENCES DE MONASTIR  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
CONFÉRENCE EN THÉORIE DES NOMBRES ET APPLICATIONS

11 Avril 2026



# Plan

- 1 **Motivations**
- 2 Généralité sur l'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ .
- 3 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  et la propriété  $S$ -noethérien
- 4 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  et la propriété SFT

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Généralité sur l'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ .
- 3 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  et la propriété  $S$ -noethérien
- 4 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  et la propriété SFT

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Généralité sur l'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ .
- 3 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  et la propriété  $S$ -noethérien
- 4 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  et la propriété SFT

# Plan

- 1 Motivations
- 2 Généralité sur l'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ .
- 3 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  et la propriété  $S$ -noethérien
- 4 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  et la propriété SFT

# Motivations

# Motivations

- 1 La théorie de Dwork illustre une évolution importante en théorie des nombres.
- 2 Cette théorie porte sur l'analyse  $p$ -adique appliqué à la géométrie algébrique.
- 3 Soit  $(E)$  une équation sur un corps  $\mathbb{F}_q$ . On veut savoir combien de solutions elle possède dans toute extension  $\mathbb{F}_{q^n}$  pour tout  $n \geq 1$ . On pose  $N_n$  le nombre de solutions de  $(E)$  dans  $\mathbb{F}_{q^n}$ .

André Weil a défini une fonction génératrice pour rassembler tous ces nombres

$$Z(V, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} N_n \frac{t^n}{n}\right).$$

# Motivations

- 1 André Weil a conjecturé que cette fonction est une fonction rationnelle.
- 2 En 1959, Dwork a donné une réponse positive à cette question.
- 3 Dans un anneau associé à la théorie de Dwork, on définit un opérateur qui "remonte" l'action du Frobenius (relèvement du Frobenius) de la caractéristique  $p$  vers la caractéristique 0 (les nombres  $p$ -adiques).
- 4 La structure de cet anneau permet de décrire comment la cohomologie de ces variétés (des solutions de l'équation  $(E)$ ) varie.

# Motivations

- 1 Les anneaux associés à la théorie de Dwork dépendent d'un paramètre de déformation.
- 2 Ce paramètre est une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  ou  $\mathbb{R}_+^k$ .

# Généralité sur l'anneau $A[X, Y; \lambda]$

L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ 

Soient  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $\lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction croissante non nulle,  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  et  $Y = \{Y_1, \dots, Y_r\}$  deux ensembles finis d'indéterminées sur  $A$ . Soit  $f \in A[X, Y]$ . On note par  $\deg_X(f)$  le degré du polynôme  $f$  comme élément de l'anneau  $(A[Y])[X]$ .

Tout élément  $f$  de  $A[X][[Y]]$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k,$$

où  $f_k$  est un polynôme homogène en  $Y$  de degré  $k$ .

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$

On note par

$$A[X, Y; \lambda] := \left\{ f = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \in A[X][[Y]], \exists c_f > 0; \deg_X(f_k) \leq c_f(\lambda(k) + 1) \forall k \geq 0 \right\}.$$

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$

## Propriétés

- 1 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  est commutative et unitaire d'unité 1.
- 2 L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  est intègre si et seulement si  $A$  est intègre.
- 3 Pour tout  $c > 0$ ,  $A[X, Y; \lambda] = A[X, Y; c\lambda]$ .

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$

## Remarque

- 1 Si  $\lambda$  est bornée, alors  $A[X, Y; \lambda] = A[[Y]][X]$ .
- 2 Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = +\infty$ , alors les inclusions  $A[[Y]][X] \subset A[X, Y; \lambda] \subset A[X][[Y]]$  sont stricts.

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$ et la propriété $S$ -noethérien

L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ 

## Définition [D. Anderson, T. Demitrescu 2002]

Soient  $A$  un anneau et  $S$  une partie multiplicative\* de  $A$ . On rappelle que l'anneau  $A$  est dit  $S$ -noethérien si pour tout idéal  $I$  de  $A$ , il existe  $s \in S$  et un idéal de type finie  $F$  de  $A$  tels que  $sI \subseteq F \subseteq I$ .

- ①  $*$  :  $1 \in S$ ,  $0 \notin S$  et pour tous  $a, b \in S$ ,  $ab \in S$ .
- ②  $S$  est dite anti-archimédienne si pour tout  $s \in S$ ,
 
$$\left( \bigcap_{n=0}^{\infty} s^n A \right) \cap S \neq \emptyset.$$

L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ 

## Théorème [A. Dabbabi, A. Benhissi 2023]

Soit  $S$  une partie multiplicative anti-archimédienne de  $A$ . On suppose que  $A$  est  $S$ -noethérien et que  $\lambda$  vérifie pour tout  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ ,  $\lambda(x) + \lambda(y) \leq \lambda(x + y)$ , alors l'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  est  $S$ -noethérien si et seulement si la suite  $(\frac{\lambda(k+1)}{\lambda(k)})_{k \geq 1}$  est bornée.

## Exemple

Soit  $S$  une partie multiplicative anti-archimédienne de  $A$  et  $\lambda(x) = e^{rx}$ ,  $x \geq 0$  et  $0 < r \leq 1$ . Si  $A$  est  $S$ -noethérien, il en est de même pour  $A[X, Y; \lambda]$ .

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$

## Théorème [A. Dabbabi, A. Benhissi 2023]

Soit  $S$  une partie multiplicative anti-archimédienne de  $A$ . On suppose que  $A$  est  $S$ -noethérien et que  $\lambda$  vérifie pour tout  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ ,  $\lambda(x) + \lambda(y) \leq \lambda(x + y)$ , alors l'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  est  $S$ -noethérien si et seulement si la suite  $(\frac{\lambda(k+1)}{\lambda(k)})_{k \geq 1}$  est bornée.

## Exemple

Soit  $S$  une partie multiplicative anti-archimédienne de  $A$  et  $\lambda(x) = e^{rx}$ ,  $x \geq 0$  et  $0 < r \leq 1$ . Si  $A$  est  $S$ -noethérien, il en est de même pour  $A[X, Y; \lambda]$ .

L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ 

Soient  $\mathcal{A} = (A_k)_{k \geq 0}$  une suite croissante d'anneaux,  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$   
 et  $\lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction croissante non nulle. On note par  
 $\mathcal{A}[X, Y; \lambda] = \{f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \in A[X, Y; \lambda], \text{ tel que } f_k \in$   
 $A_k[X, Y] \text{ pour tout } k \geq 0\}$ .  
 On remarque que  $\mathcal{A}[X, Y; \lambda]$  est un sous-anneau de  $A[X, Y; \lambda]$ .

L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ 

## Théorème [A. Dabbabi, A. Benhissi 2023]

Soient  $\mathcal{A} = (A_k)_{k \geq 0}$  une suite croissante d'anneaux et  $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction croissante non nulle. On suppose que pour tous  $x, y \geq 1$ ,  $\lambda(x) \neq 0$ ,  $\lambda(x) + \lambda(y) \leq \lambda(x + y)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① L'anneau  $\mathcal{A}[X, Y; \lambda]$  est noethérien.
- ② L'anneau  $A_0$  est noethérien, la suite  $\mathcal{A}$  est stationnaire, pour tout  $k \geq 1$ , le  $A_0$ -module  $A_k$  est de type fini et la suite  $(\frac{\lambda(k+1)}{\lambda(k)})_{k \geq 1}$  est bornée.

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$ et la propriété SFT

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$

## Définition

La dimension de Krull est une modélisation de la dimension géométrique d'une variété algébrique (la longueur de l'emboîtement de sous-variétés).

De plus, un point  $x$  d'une variété  $V$  est isolé si et seulement si la dimension de Krull de l'anneau  $\mathcal{O}_{V,x}$  est 0, avec

$$\mathcal{O}_{V,x} = A(V)_{M_x} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in A(V), g(x) \neq 0 \right\}.$$

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$

## Définition [Arnold 1973]

L'anneau  $A$  est dit SFT si pour tout idéal  $I$  de  $A$ , il existe  $k \geq 1$  et un idéal de type fini  $F$  de  $A$  tels que  $x^k \in F$ , pour tout  $x \in I$ .

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$

## Théorème [A. Dabbabi, A. Benhissi 2024]

On suppose que  $A$  est un anneau noethérien de caractéristique non nulle et que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(k+1)}{\lambda(k)} = +\infty$ . Alors l'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  est SFT.

# Topologie $I$ -adique

Soit  $I$  un idéal de  $A$  vérifiant  $\bigcap_{n:0}^{\infty} I^n = (0)$ . On considère

l'application  $v : A \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , définie par

$v(x) = \sup\{n \in \mathbb{N}; x \in I^n\}$  pour tout  $x \in A$ . Pour  $x, y \in A$ , on pose  $d(x, y) = e^{-v(x-y)}$  avec la convention  $e^{-\infty} = 0$ .

L'application  $d$  est une distance sur  $A$ . La topologie définie par  $d$  sur  $A$  est appelée la topologie  $I$ -adique.

## Exemple

L'anneau  $A[[X]]$  est le complété de  $A[X]$  pour la topologie  $X$ -adique.

# Topologie $I$ -adique

Soit  $I$  un idéal de  $A$  vérifiant  $\bigcap_{n:0}^{\infty} I^n = (0)$ . On considère

l'application  $v : A \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , définie par

$v(x) = \sup\{n \in \mathbb{N}; x \in I^n\}$  pour tout  $x \in A$ . Pour  $x, y \in A$ , on pose  $d(x, y) = e^{-v(x-y)}$  avec la convention  $e^{-\infty} = 0$ .

L'application  $d$  est une distance sur  $A$ . La topologie définie par  $d$  sur  $A$  est appelée la topologie  $I$ -adique.

## Exemple

L'anneau  $A[[X]]$  est le complété de  $A[X]$  pour la topologie  $X$ -adique.

# Topologie $I$ -adique

## Théorème [Kang, Park 1999]

Si  $A$  est un  $\infty$ SFT anneau de Prüfer et  $I$  un idéal de  $A$  satisfaisant  $\bigcap_{n:0} I^n = (0)$ . Alors le complété de  $A$  pour la topologie  $I$ -adique est SFT.

# Exemple de Coykendall

## Exemple [J. Coykendall 2002]

$$\mathbb{F}_2[\mathbb{Q}_+] \implies V = \mathbb{F}_2[\mathbb{Q}_+]_M \text{ avec } M = \langle t^r, r > 0 \rangle \implies \\ V_1 = \mathbb{F}_2 + tV \subseteq V.$$

L'anneau  $V_1$  est  $SFT$  mais l'anneau  $V_1[[X]]$  ne l'est pas.

Proposition [M. H. Park 2019]

L'anneau  $V_1[X]$  est un  $SFT$ -anneau.

# Exemple de Coykendall

## Exemple [J. Coykendall 2002]

$\mathbb{F}_2[\mathbb{Q}_+] \implies V = \mathbb{F}_2[\mathbb{Q}_+]_M$  avec  $M = \langle t^r, r > 0 \rangle \implies$

$V_1 = \mathbb{F}_2 + tV \subseteq V.$

L'anneau  $V_1$  est  $SFT$  mais l'anneau  $V_1[[X]]$  ne l'est pas.

Proposition [M. H. Park 2019]

L'anneau  $V_1[X]$  est un  $SFT$ -anneau.

# Exemple de Coykendall

## Exemple [J. Coykendall 2002]

$\mathbb{F}_2[\mathbb{Q}_+] \implies V = \mathbb{F}_2[\mathbb{Q}_+]_M$  avec  $M = \langle t^r, r > 0 \rangle \implies$

$V_1 = \mathbb{F}_2 + tV \subseteq V.$

L'anneau  $V_1$  est  $SFT$  mais l'anneau  $V_1[[X]]$  ne l'est pas.

## Proposition [M. H. Park 2019]

L'anneau  $V_1[X]$  est un  $SFT$ -anneau.

# L'anneau $A[X, Y; \lambda]$

Proposition [A. Dabbabi, A. Benhissi 2024]

On suppose que  $A$  est un anneau noethérien de caractéristique non nulle et que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(k+1)}{\lambda(k)} = +\infty$ . Alors l'anneau  $A[X, Y; \lambda]$  est SFT et admet des complétion noethériennes pour la topologie  $XA[X, Y; \lambda]$ -adique et  $YA[X, Y; \lambda]$ -adique.

L'anneau  $A[X, Y; \lambda]$ 

## Exemple

- ① On suppose que  $A$  est un anneau noethérien de caractéristique non nulle et  $\lambda(x) = e^{rx^s}$ ,  $x \geq 0$  avec  $r > 0$  et  $s > 1$ . Alors  $A[X, Y; \lambda]$  est un SFT anneau qui admet des complétions noethériennes pour la topologie  $X$ -adique et la topologie  $Y$ -adique.
- ② On suppose que  $A$  est un anneau noethérien de caractéristique non nulle et  $\lambda(x) = \Gamma(x + 2) = \int_0^{+\infty} t^{x+1} e^{-t} dt$ ,  $x \geq 0$ . Alors  $A[X, Y; \lambda]$  est un SFT anneau qui admet des complétions noethériennes pour la topologie  $X$ -adique et la topologie  $Y$ -adique.